

DS de mathématiques n°2 (durée : 1h30)

Le cheminement de votre pensée doit être apparent (autrement dit : il faut justifier ses réponses ;). Le barème est donné à titre indicatif, et des points seront attribués pour la présentation et la rédaction de la copie ; En particulier, mettez vos résultats en valeur, par exemple en les soulignant d'une autre couleur ou en les encadrant.

Les calculatrices et documents de tout type sont interdits.

Les exercices marqués d'une étoile (*) sont potentiellement plus difficiles que les autres.

Exercice 1 (2,5 pts).

1. Déterminer les racines cubiques du nombre $z = -8$ (détailler la démarche).
2. Placer ces racines cubiques dans le plan complexe.

Exercice 2 (2 pts). Calculer les sommes suivantes.

1. $A_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$
2. $B_n = \sum_{k=0}^n \frac{k+1}{(k+2)!}$ (Indication : utiliser une roubardise mathématique...)

Exercice 3 (1 pt). Un étudiant affirme que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{5n^2 - 7n + 4}{2}$. Que diriez-vous à cet étudiant ?

Exercice 4 (5 pts).

1. Rappeler les résultats de $E_n = \sum_{k=1}^n k$ et $P_n = \sum_{k=0}^n x^k$, où x est un réel. *Note : aucune justification n'est nécessaire, mais un point supplémentaire vous sera accordé si vous démontrez ces deux résultats.*

Dans toute la suite, on calculera les sommes en se ramenant systématiquement à E_n ou P_n (par des changements d'indice ou autres techniques), sans utiliser d'autres formules.

2. Calculer $S = \sum_{k=2}^n (3n - 2k + 1)$.
3. Calculer $T = \sum_{k=1}^n \frac{3^k}{4^{k+1}}$.

Exercice 5 (2 pts).

1. Rappeler la formule du binôme de Newton.
2. En déduire le résultat de la somme suivante : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$.

Exercice 6 (* 4 pts). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi\mathbb{Z}\}$.

1. En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, calculer $\sum_{k=0}^n e^{ik\theta}$.

2. En utilisant judicieusement une factorisation par $e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}$ et $e^{i\frac{\theta}{2}}$ dans le résultat précédent, montrer que

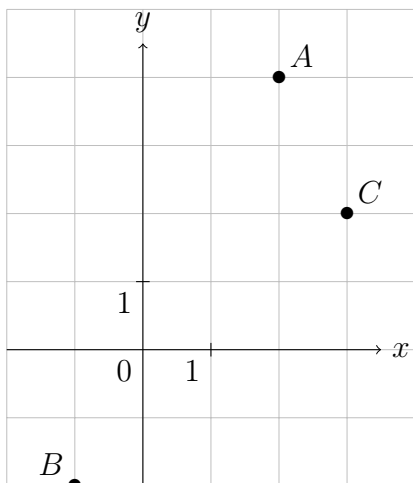
$$\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = e^{i\frac{n\theta}{2}} \frac{\sin(\frac{(n+1)\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}$$

3. En déduire (en 1 ligne) $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$.

Exercice 7 (1,5 pts). Résoudre le système suivant en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes.

$$\begin{cases} -2x + 3y - z = 2 \\ 3x - y + 3z = 1 \\ 5x + 3y + 7z = 7 \end{cases}$$

Exercice 8 (3 pts). Dans cet exercice, on cherche à effectuer une interpolation, c'est-à-dire à déterminer une courbe passant par les points A , B et C représentés sur le graphe suivant.



1. En se servant de la méthode du pivot de Gauss, résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 9x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

2. Déterminer la fonction polynômiale de degré 2 dont la courbe représentative passe par les trois points considérés.

Exercice 9 (1 pt). Effectuer la division euclidienne de $X^5 + X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 6$ par $X^3 - 3X + 2$.

Exercice 10 (Question bonus : jusqu'à 1 point).

Si l'univers disparaissait demain, que feriez-vous ?

Exercice 11 (Exercice à chercher chez soi). J'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez. Quand vous aurez l'âge que j'ai, ensemble, nous aurons 63 ans. Quels sont alors nos âges ?